UFSC - CÁLCULO D - 2014.2 - 1A. PROVA

RAPHAEL DA HORA

(1) Determine as partes real e imaginária do número complexo $\overline{\dfrac{(1-i)^2}{4-3i}}$. (1,0 ponto)

(2) Escreva o número complexo $(1+\sqrt{3}i)(-1+i)^4$ na forma polar. (1,5 ponto)

(3) Faça um esboço e identifique o conjunto dos números $z \in \mathbb{C}$ tais que $|z-1| = \mathrm{Re}(z)$. (1,5 ponto)

(4) Determine todos os números complexos z que resolvem $z^4 = -1$. (1,0 ponto)

(5) Determine todos os números $z \in \mathbb{C}$ tal que $e^{(z-i)} = \exp(z-i) = i$. (1,0 ponto)

(6) Seja $v(x,y) = x^2 - y^2 + 2xy - 3x$. Determine uma função $u(x,y)$ tal que $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ seja holomorfa. (1,5 ponto)

(7) Determine a imagem da reta $\mathrm{Re}(z) = \ln 2$ pela função exponencial $f(z) = e^z$. (1,0 ponto)

(8) Determine a imagem do semicírculo $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1,\ 0 < \arg(z) < \pi\}$ pela função $f(z) = \log z$. (1,5 ponto)

SOLUÇÃO

1. Temos que

$$\frac{\overline{(1-i)^2}}{4-3i} = \frac{(1+i)^2}{4-3i} = \frac{1+2i+i^2}{4-3i}\frac{4+3i}{4+3i} = \frac{8i+6i^2}{4^2+3^2} = -\frac{6}{25}+\frac{8}{25}i.$$

2. Temos que

$$|1+\sqrt{3}i| = \sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2;$$
$$|-1+i| = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}.$$

Seja $\theta_1 = \arg(1+\sqrt{3}i)$ e $\theta_2 = \arg(-1+i)$. Logo

$$1 = 2\cos\theta_1, \quad \sqrt{3} = 2\text{sen }\theta_1 \Rightarrow \theta_1 = \pi/3;$$
$$-1 = \sqrt{2}\cos\theta_2, \quad 1 = \sqrt{2}\text{sen }\theta_2 \Rightarrow \theta_2 = 3\pi/4.$$

Então

$$1+\sqrt{3}i = 2e^{\pi i/3}, \quad -1+i = \sqrt{2}e^{3\pi i/4}$$
$$\Rightarrow (1+\sqrt{3}i)(-1+i)^4 = 2e^{\pi i/3}\left(\sqrt{2}e^{3\pi i/4}\right)^4 = 8e^{10\pi i/3} = 8e^{4\pi i/3}.$$

3. Temos que se $z = x+iy$, então

$$|z-1| = \sqrt{(x-1)^2+y^2}, \quad \mathrm{Re}(z) = x.$$

Logo queremos encontrar $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tais que

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2} = x \Rightarrow (x-1)^2+y^2 = x^2 \Rightarrow -2x+1+y^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{y^2+1}{2}.$$

Essa é a equação de uma parábola com vértice no ponto $(1/2,0)$ com concavidade voltada para a parte positiva do eixo real x.

4. Seja $z = re^{i\theta}$, onde $r = |z|$ e $\theta = \arg(z)$. Queremos

$$z^4 = r^4e^{4\theta i} = -1 = e^{\pi i} \Rightarrow r^4 = 1, \quad 4\theta = \pi + 2n\pi, n\in\mathbb{Z}.$$

Temos portanto quatro raízes

$$z_0 = e^{\pi i/4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i), \quad z_1 = e^{3\pi i/4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i),$$
$$z_2 = e^{5\pi i/4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i), \quad z_3 = e^{7\pi i/4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i).$$

5. Seja $z = x+iy$. Queremos

$$e^{(z-i)} = e^{x+i(y-1)} = e^xe^{(y-1)i} = i = e^{\pi i/2} \Rightarrow e^x = 1, \quad y-1 = \frac{\pi}{2}+2n\pi, n\in\mathbb{Z}$$
$$\Rightarrow x = 0, \quad y = 1+\frac{\pi}{2}+2n\pi, n\in\mathbb{Z}$$
$$\Rightarrow z = \left(1+\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)i, n\in\mathbb{Z}.$$

6. Queremos encontrar $u(x,y)$ tal que

$$u_x = v_y = -2y + 2x, \quad u_y = -v_x = -2x - 2y + 3$$

$$\Rightarrow u(x,y) = \int u_x dx + C(y) = -2xy + x^2 + C(y)$$

$$\Rightarrow \partial_y(-2xy + x^2 + C(y)) = -2x - 2y + 3 \Rightarrow C'(y) = 3 - 2y \Rightarrow C(y) = 3y - y^2 + K,$$

onde $K \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária. Podemos tomar $K = 0$ e portanto

$$u(x,y) = -2xy + x^2 + 3y - y^2.$$

7. Seja $z = x + iy$. Temos

$$\mathrm{Re}(z) = x = \ln 2 \Rightarrow e^z = e^{\ln 2} e^{iy} = 2(\cos y + i \text{ sen } y).$$

Portanto a imagem da reta $\mathrm{Re}(z) = \ln 2$ pela função exponencial $f(z) = e^z$ é a circunferência com centro na origem e raio 2.

8. Seja $z = re^{i\theta}$, onde $r = |z|$ e $\theta = \arg(z)$. Temos que

$$\log z = \ln r + i\theta.$$

Portanto se $r = 1$ e $0 < \theta < \pi$, então

$$\mathrm{Re}(\log z) = \ln r = 0, \quad 0 < \mathrm{Im}(\log z) < \pi.$$

Logo a imagem do semicírculo $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1,\ 0 < \arg(z) < \pi\}$ pela função $f(z) = \log z$ é a semireta de $(0,0)$ a $(0,\pi)$.